不妨设 $x_1=0$ 或 $x_1+x_2=0$.

情形 1 $x_1=0$. 此时原不等式

$$\Leftrightarrow \sum_{i,\,j=2}^{n}\sqrt{|x_i-x_j|}+2\cdot\sum_{i=2}^{n}\sqrt{|x_i|}\le\sum_{i,\,j=2}^{n}\sqrt{|x_i+x_j|}+2\cdot\sum_{i=2}^{n}\sqrt{|x_i|}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i,\,j=2}^{n}\sqrt{|x_i-x_j|}\le\sum_{i,\,j=2}^{n}\sqrt{|x_i+x_j|},$$

由归纳假设, 原不等式成立.

情形 2 $x_1+x_2=0$. 此时原不等式等价于

$$\sum_{i,\,j=1}^{2}\sqrt{|x_i-x_j|}+\sum_{i,\,j=3}^{n}\sqrt{|x_i-x_j|}+2\cdot\sum_{i=3}^{n}(\sqrt{|x_1-x_i|}+\sqrt{|x_2-x_i|})$$
$$\le\sum_{i,\,j=1}^{2}\sqrt{|x_i+x_j|}+\sum_{i,\,j=3}^{n}\sqrt{|x_i+x_j|}+2\cdot\sum_{i=3}^{n}(\sqrt{|x_1+x_i|}+\sqrt{|x_2+x_i|})$$

其中,

$$\begin{aligned}2\cdot\sum_{i=3}^{n}(\sqrt{|x_1-x_i|}+\sqrt{|x_2-x_i|})&=2\cdot\sum_{i=3}^{n}(\sqrt{|-x_2-x_i|}+\sqrt{|-x_1-x_i|})\\&=2\cdot\sum_{i=3}^{n}(\sqrt{|x_1+x_i|}+\sqrt{|x_2+x_i|})\end{aligned}\tag{1}$$

对 $(x_1,\,x_2)$, $(x_3,\,\cdots,\,x_n)$ 分别用归纳假设知

$$\sum_{i,\,j=1}^{2}\sqrt{|x_i-x_j|}\le\sum_{i,\,j=1}^{2}\sqrt{|x_i+x_j|}\tag{2}$$

$$\sum_{i,\,j=3}^{n}\sqrt{|x_i-x_j|}\le\sum_{i,\,j=3}^{n}\sqrt{|x_i+x_j|}\tag{3}$$

$(1)+(2)+(3)$ 知原不等式也成立.

综上, 由归纳法, 原题得证.

评注 本题是困难的不等式. 本题需观察到可以作调整 $x_i\to x_i+d\ (\forall i)$, 这样调整后就可以归纳了. 其中的调整有多种可能的调整方法, 需尝试, 并选择一种可用的. 本题还有一些其他的 (超出竞赛范畴的) 解法, 例如本题形式上和著名不等式 $\sum\frac{a_ia_j}{i+j}\ge 0$ 比较像, 从而可能尝试积分, 但所需用到的积分公式是竞赛选手不知道的.

本题中"调整平移+归纳"的方法也可以用来解决 2009 年集训队测试第 1 天第 3 题:

$$2XY\cdot\sum|x_i-y_j|\ge X^2\cdot\sum|y_i-y_j|+Y^2\cdot\sum|x_i-x_j|$$

3. 设 D 是锐角三角形 ABC $(AB>AC)$ 内部一点, 使得 $\angle DAB=\angle CAD$. 线段 AC 上的点 E 满足 $\angle ADE=\angle BCD$, 线段 AB 上的点 F 满足 $\angle FDA=$